

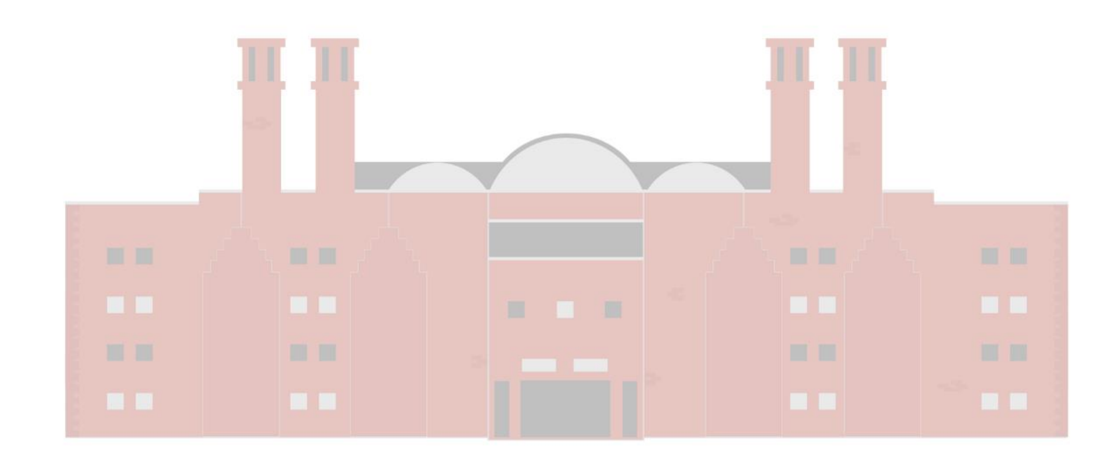
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول



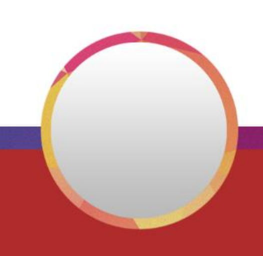
5 صفحات





الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: 2014/10/22





السرعة، الدقّة والتميُّز








لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

التوابع التوافقية ومعادلة لابلاس

Harmonic functions , laplaces Equation:

إذا كان $f = u + iv$ تحليلي في D، $u, v \in cl^2$ ومستمرة في D

طالما أن التابع تحليلي في D فإنه يحقق معادلتي كوشي_ريمان

$$u''_{x^2} = v''_{yx} \qquad , \qquad u''_{y^2} = -v''_{yx}$$

$$\nabla^2 u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

وهي تسمى معادلة لابلاس، حلها يسمى تابع توافقي في D

ملاحظة: بنفس الطريقة نوجد المعادلة بالنسبة لـ v.

عندما يكون التابع f تحليلي فإن u , v تابعان توافقيان مترافقان.

معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية

$$\nabla^2 u = u''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u'_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u''_{\varphi\varphi} = 0$$

مبرهنة:

إذا كان u و v توافقيان ويحققان معادلتي كوشي _ ريمان في D فإنهما يشكلان القسم الحقيقي والقسم التخيلي لتابع تحليلي ويسمى u و v عندئذ تابعان توافقيان مترافقان .

عندئذ كلاهما يكونان جزء حقيقي وجزء تخيلي .

مهما يكن التابع التوافقي u في D فإنه يوجد تابع توافقي مترافق معه اسمه V .

مثال :

تحقق ان التابع $u = x^2 - y^2 - y$ توافقي في D ثم أوجد التابع التحليلي V المرافق. عين D ثم عبر عن f بدلالة z.

$$\grave{u}_{x^2} = 2 \, , \grave{u}_{y^2} = -2$$

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \forall (x, y) \in R^2$$

لإيجاد المرافق v نعوض في معادلتي كوشي _ريمان




$$\grave{u}_x = 2x = \grave{v}_y \ \ldots 1 \qquad , \qquad \grave{u}_y = -2y - 1 = \grave{v}_x \ldots 2$$

$$\Rightarrow v(x,y) = \int 2x\, dy + h(x) = 2xy + \grave{h}(x)$$

نعوض في ... 2

$$-2y - 1 = -\left(2xy + h(x)\right)' \Rightarrow -2y - 1 = -2y - h'(x)$$

$$-\grave{h}(x) = -1 \Rightarrow h(x) = x + c$$

$$v = 2xy + x + c$$

وهو المرافق التوافقي .

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c)$$

$$= (x^2 - y^2 + i2xy) + i(x + iy) + ic$$

$$f(z) = z^2 + iz + ic$$

طريقة (٢):

$$f(z) = u(z,0) + iv(z,0) = z^2 + iz + ic$$

النقاط الشاذة :

نقول عن نقطة z_0 أنها نقطة شاذة للتابع وحيد الفرع $f(z)$ إذا كان غير معرف عندها أو غير تحليلي عندها ، وعدا ذلك تسمى النقطة عادية

مثال:

$$f = \frac{2z - 4}{z^2 + 1}$$

النقاط الشاذة هي $z = \mp i$

نقول عن النقطة الشاذة أنها معزولة أذا أمكن أيجاد جوار يحويها محتوى في مجموعة تعريف f ولا يحوي نقاط شاذة للتابع f غير z_0

مثال:

$$f(z) = \frac{z^2}{\sin z}$$

النقاط الشاذة هي $z = \pi k$ وهي مجموعة نقاط غير منتهية وكلها معزولة

النقاط الشاذة القابلة للحذف (أو للإزالة):

تكون النقطة الشاذة z_0 للتابع f قابلة للإزالة إذا كانت النهاية $\lim_{z\to z_0} f(z)$ موجودة ومحددة، وغير ذلك تسمى غير قابلة للإزالة .

مثال: $$f(z)=\frac{\sin z}{z}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{sinz}{z}=1 \Rightarrow$$ النهاية موجودة لأن: $z=0$ شاذة وقابلة للحذف

مثال: $$f(z)=\frac{1}{z}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z} \Rightarrow$$ النهاية غير موجودة لأن: $z=0$ شاذة

إذا $z=0$ ليست قابلة للإزالة .

مثال: $$f(z)=\cos\frac{1}{z}$$

$z=0$ شاذة ولكن لا يوجد نهاية عندما $z\to 0$ فبالتالي $z=0$ ليست قابلة للإزالة.

تصنيف النقاط الشاذة والغير قابلة للإزالة للتابع f :

إذا وجد العدد الطبيعي n بحيث يكون :

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]\neq 0$$

فإننا نسمي z_0 قطب من المرتبة n لـ f وإذا تعذر ذلك فإننا نسمي z_0 نقطة شاذة أساسية أو جوهرية لـ f

مثال: $$f(z)=\frac{1}{z}$$

$z=0$ نقطة شاذة وهي غير قابلة للإزالة

$$\lim_{z\to 0}\ (z-0)^1 f(z)=1$$

$z=0$ قطب بسيط(من المرتبة الاولى) لـ $\frac{1}{z}$

مثال: عين وصنف النقاط الشاذة لكل من التوابع التالية:

- $$\boldsymbol{f(z)=\frac{\sin z}{z^2}}$$

Z=0نقطة شاذة غير قابلة للإزالة

$$\lim_{z\to 0} z^n \frac{\sin z}{z^2} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{z\to 0} z^1 \frac{\sin z}{z^2} = 1 \neq 0$$

Z = 0 قطب من المرتبة (١)

==

$$f(Z) = e^{\frac{1}{z}-1} \quad \bullet$$

نقطة شاذة $z_0 = 1$

$$\lim_{z\to 1} e^{\frac{1}{z}-1} = \text{النهايةغيرموجودة}$$

غير قابلة للازالة $z = 1$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^n e^{\frac{1}{z}-1} = \text{غير موجودة}$$

اساسية $z_0 = 1$

==

$$f(z) = \frac{z+2i}{(z^2+4)(z+5)^2} \quad \bullet$$

. نقاط شاذة $z = -5$, $Z = \mp 2i$

$$z = -2i \Rightarrow f(z) = \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2}$$

$$\lim_{z\to -2i} f(z) = \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2}$$

$$\lim_{z\to -2i} f(z) = -\frac{1}{80+84i} = -2$$

قابلة للإزالة $z = -2i$

$$z = 2i \Rightarrow \lim_{z\to 2i} \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2} \quad \text{غيرموجودة}$$

$z = 2i$ غير قابلة للإزالة.

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2} = \frac{1}{(2i+5)^2} \neq 0$$

$Z_2=2i$ قطب بسيط.

$$Z=-5 \Rightarrow \lim_{z\to -5}\frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2}$$

هذه النهاية غير موجودة

$Z=-5$ غير قابلة للإزالة.

$$\lim_{z\to -5}(z+5)^2\frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2} = \frac{1}{-5-2i} \neq 0$$

$Z_3=-5$ قطب من المرتبة الثانية

للمساعدة في حل أي تمرين أتساءل على الشكل التالي:

١. ماهي النقطة الشاذة؟
٢. هل هي قابلة للإزالة؟
٣. هل هذه النهاية موجودة؟
٤. إذا كانت غير قابلة للإزالة فهي بحاجة لتصنيف

تصويبات المحاضرة التاسعة:

الصفحة (٧): معادلة اللزوم _ معادلتي كوشي_ريمان

الخطأ: $u'_y = v'_x$

الصواب: $u'_y = -v'_x$